



Kategorientheorie für Programmierer

Hausaufgabenblatt 4 – SS18

Tübingen, 23. Mai 2018

Aufgabe 1: Lektüre

Für die nächste Sitzung lesen Sie bitte Kapitel 10, 12 und 13 und schicken Ihre Fragen bis Dienstag Abend (also Dienstag, der 5. Juni) an uns.

Aufgabe 2: Natürliche Transformationen – Ein Beispiel

Gegeben sind folgende Definitionen für einen generischen Binärbaum:

```
data Tree a = Empty | Node a (Tree a) (Tree a)
```

```
instance Functor Tree where
```

```
  fmap _ Empty      = Empty
```

```
  fmap f (Node a l r) = Node (f a) (fmap f l) (fmap f r)
```

```
flatten :: Tree a -> [a]
```

```
flatten Empty = []
```

```
flatten (Node a l r) = a : (flatten l ++ flatten r)
```

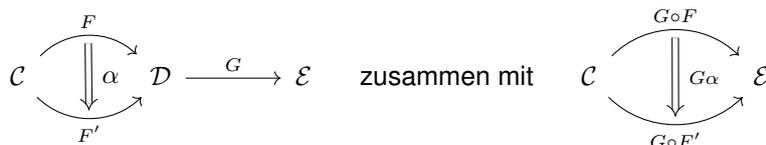
Zeigen Sie, dass `flatten` eine natürliche Transformation vom Baum- zum Listenfunktor ist (*Hinweis*: Induktion). Sie können dabei annehmen, dass `fmap f (xs ++ ys) = fmap f xs ++ fmap f ys` gilt (mit anderen Worten: `++`) ist eine natürliche Transformation von Paaren von Listen zu Listen).

Aufgabe 3: Natürliche Transformationen – Komposition

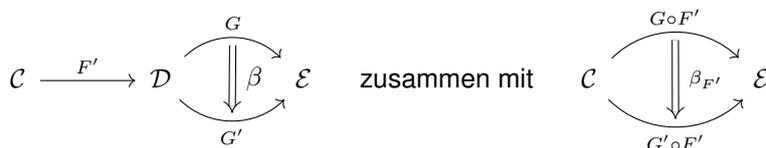
Beweisen Sie, dass die horizontale Komposition von natürlichen Transformationen wieder eine natürliche Transformation ergibt.

Hinweis: Betrachten Sie dazu eine alternative Definition von horizontaler Komposition. Seien dazu \mathcal{C} , \mathcal{D} und \mathcal{E} Kategorien und $F, F': \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ sowie $G, G': \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ Funktoren. Seien außerdem $\alpha: F \Rightarrow F'$ und $\beta: G \Rightarrow G'$ natürliche Transformationen.

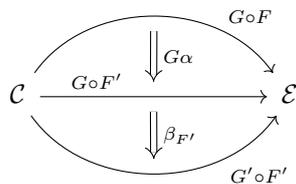
Nun definieren wir neue natürliche Transformationen $G\alpha: G \circ F \Rightarrow G \circ F'$ mit $(G\alpha)_a := G\alpha_a$ und $\beta_{F'}: G \circ F' \Rightarrow G' \circ F'$ mit $(\beta_{F'})_a := \beta_{F'a}$ (diese Operationen werden auch als *Whiskering* bezeichnet). Mit deren Hilfe lässt sich nun eine alternative, äquivalente Version der horizontalen Komposition definieren: $\beta * \alpha := \beta_{F'} \circ G\alpha$ (dabei ist $*$ die horizontale und \circ die vertikale Komposition von natürlichen Transformationen). Aus den angegebenen Schritten ergeben sich folgende Situationen:



sowie



ergeben



Zeigen Sie nun, dass $G\alpha$, $\beta_{F'}$ und somit auch $\beta * \alpha$ natürliche Transformationen sind.

Aufgabe 4: Limits und Colimits

Sei $\mathcal{P} = 1 \rightarrow 2 \leftarrow 3$ die Startkategorie für Pullbacks und \mathcal{C} eine beliebige Kategorie mit allen Produkten (also auch mit einem Terminalobjekt). Finden Sie einen Funktor $D: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C}$, sodass $\lim D = A \times B$ gilt. Oder mit anderen Worten: Zeigen Sie, dass sich Produkte durch Pullbacks definieren lassen.

Finden Sie anschließend eine Möglichkeit, Equalizer durch Pullbacks auszudrücken.

Wie verhält es sich bei Pushouts zusammen mit Coprodukten?

Sei nun $\mathcal{C} = \text{Set}$. Geben Sie für beliebige Mengen A, B und C sowie Funktionen $f: A \rightarrow C$ und $g: B \rightarrow C$ an, wie der Pullback dieser Funktionen aussieht.

Geben Sie ebenfalls eine allgemeine Definition des Pushouts für die Funktionen $p: C \rightarrow A$ und $q: C \rightarrow B$ an.