EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Programmiersprachen

Prof. Klaus Ostermann

Leitung des Seminars
David Binder
Ingo Skupin

Kategorientheorie für Programmierer

Hausaufgabenblatt 7 – WS19

Tübingen, 12. Dezember 2019

Aufgabe 1: Lektüre

Für kommende Woche lesen Sie bitte Kapitel 5 aus dem Artikel „Reason Isomorphically!“ von Ralf Hinze und Daniel W.H. James.

Aufgabe 2: Adjunktionen – Beispiele

Seien $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{R}$ die die ganzen beziehungweise die reellen Zahlen, jeweils als preorder-Kategorien mit ihren natürlichen Ordnungen. Zeigen Sie, dass für die Auf- beziehungsweise Abrundefunktionen $\lceil\cdot\rceil, \lfloor\cdot\rfloor\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ und die natürliche Injektion $i\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ gilt, dass $\lceil\cdot\rceil$ links- und $\lfloor\cdot\rfloor$ rechtsadjungiert zu i ist.

Aufgabe 3: Adjunktionen – Beispiele 2

Sei $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie mit Initial- und Terminalobjekten. Sei außerdem $\mathbf{1}$ die Kategorie mit nur einem Objekt und nur einem Morphismus (der Identität auf dem Objekt). Zeigen Sie, dass man das Initial- und das Terminalobjekt jeweils durch eine Adjunktion zwischen diesen beiden Kategorien darstellen kann.

Aufgabe 4: Äquivalenz der Adjunktionsdefinitionen

Gegeben seien zwei Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$, sowie zwei Funktoren $L\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $R\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, wie im folgenden Bild dargestellt:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "L"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "R"] \end{tikzcd},$$

Im Artikel ist die Adjunktion wie folgt definiert:
L ist linksadjungiert zu R, wenn ein natürlicher Isomorphismus $\varphi_{c,d}$ existiert

$$\varphi_{c,d}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Lc, d) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, Rd) : \psi_{c,d} \tag{1}$$

Alternativ kann die Adjunktion wie folgt definiert werden.

L ist linksadjungiert zu R, wenn natürliche Transformationen $\eta\colon I_{\mathcal{C}} \to R \circ L$ und $\varepsilon\colon L \circ R \to I_{\mathcal{D}}$ existieren, sodass folgende Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "L\eta"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & LRL \arrow[d, "\varepsilon_L"] \\ & L \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R \arrow[r, "\eta_R"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & RLR \arrow[d, "R\varepsilon"] \\ & R \end{tikzcd} \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass die beiden Definitionen äquivalent sind.
Hinweise:

- Für die Richtung $(2) \to (1)$:
  Die Morphismen $\varphi_{c,d}$ und $\psi_{c,d}$ aus der Definition (1) können wie folgt definiert werden:

  $$\begin{aligned} \varphi_{c,d}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Lc,d) &\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c,Rd) \\ f &\mapsto Rf \circ \eta_c \end{aligned}$$

  und

  $$\begin{aligned} \psi_{c,d}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c,Rd) &\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Lc,d) \\ g &\mapsto \varepsilon_d \circ Lg \end{aligned}$$

  Zeigen Sie, dass $\varphi_{c,d} \circ \psi_{c,d} = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c,Rd)}$ und $\psi_{c,d} \circ \varphi_{c,d} = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Lc,d)}$ für alle Objekte c aus $\mathcal{C}$ und d aus $\mathcal{D}$ gilt. Zeigen Sie außerdem, dass φ und ψ natürliche Transformationen zwischen den Profunktoren $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L-,-)\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \to \mathcal{S}et$ und $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,R-)\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \to \mathcal{S}et$ sind, wobei diese Profunktoren durch

  $$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L-,-)(c,d) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Lc,d) \qquad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,R-)(c,d) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c,Rd)$$

  auf Objekten und

  $$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Lf,g)(h) &\coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L-,-)(f^{\mathrm{op}},g)(h) = g \circ h \circ Lf \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Lc',d') \quad \text{für } h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Lc,d) \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,Rg)(h) &\coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,R-)(f^{\mathrm{op}},g)(h) = Rg \circ h \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c',Rd') \quad \text{für } h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c,Rd) \end{aligned}$$

  auf Morphismen $f\colon c' \to c$ und $g\colon d \to d'$ definiert sind.

- Für die Richtung $(1) \to (2)$:
  Betrachten Sie die natürlichen Transformationen $\epsilon_d \coloneqq \varphi_{Rd,d}$ und $\eta_c \coloneqq \psi_{c,Lc}$.