



# Kategorientheorie für Programmierer

Hausaufgabenblatt 3 – WS19

Tübingen, 13. November 2019

## Aufgabe 1: Lektüre

Für kommende Woche lesen Sie bitte Kapitel 8 und 9 und schicken Ihre Fragen bis Montag Abend an uns.

## Aufgabe 2: Eindeutigkeit

Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie,  $A$  und  $B$  Objekte in dieser Kategorie und  $P$  und  $Q$  seien beide jeweils Produkte von  $A$  und  $B$  mit Projektionen  $p_1: P \rightarrow A$  und  $p_2: P \rightarrow B$  beziehungsweise  $q_1: Q \rightarrow A$  und  $q_2: Q \rightarrow B$ .

Zeigen Sie, dass  $P$  und  $Q$  isomorph sind.

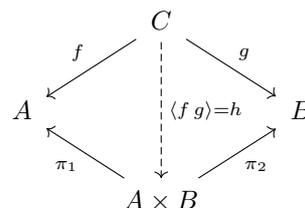
*Hinweis:* Der Beweis funktioniert analog zum Beweis für die Isomorphie von initialen Objekten (vgl. 5.4 im Buch) und verwendet nur die universelle Eigenschaft der beiden Produkte.

*Bonus:* Wie verhält es sich bei zwei Coprodukten?

## Aufgabe 3: Funktoren

Sei  $\mathcal{C}$  eine beliebige Kategorie. Dann nennen wir  $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$  die *Produktkategorie* von  $\mathcal{C}$  mit sich selbst. Die Objekte in dieser Kategorie sind Paare  $(A, B)$  von Objekten  $A$  und  $B$  aus  $\mathcal{C}$ . Die Morphismen zwischen Objekten  $(A, B)$  und  $(A', B')$  sind Paare  $(f, g)$  von Morphismen  $f: A \rightarrow A'$  und  $g: B \rightarrow B'$  aus  $\mathcal{C}$ .

Für Morphismen  $f: C \rightarrow A$  und  $g: C \rightarrow B$ , notieren wir den universellen Morphismus  $h: C \rightarrow A \times B$  des Produkts  $A \times B$  mit  $\langle f, g \rangle$ .



Dann definieren wir  $f \times g: A \times B \rightarrow A' \times B'$  für  $f: A \rightarrow A'$  und  $g: B \rightarrow B'$  als  $f \times g = \langle f \circ \pi_1, g \circ \pi_2 \rangle$ :

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xleftarrow{\pi_1} & A \times B & \xrightarrow{\pi_2} & B \\
 \downarrow f & & \downarrow f \times g & & \downarrow g \\
 A' & \xleftarrow{\pi'_1} & A' \times B' & \xrightarrow{\pi'_2} & B'
 \end{array}$$

Zeigen Sie, dass  $\times: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  mit  $\times(A, B) := A \times B$  auf Objekten und  $\times(f, g) := f \times g$  ein Bifunktor (also ein Funktor von  $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$  nach  $\mathcal{C}$ ) ist.

*Hinweis:* In beiden Fällen müssen Sie die Eindeutigkeit der Morphismen der universellen Eigenschaft des Produkts verwenden. Es hilft meistens, sich die Situation anhand eines Diagramms zu verdeutlichen.