EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Fachbereich Informatik

Programmiersprachen und Softwaretechnik

Prof. Dr. Klaus Ostermann

Leitung des Übungsbetriebs
Philipp Schuster
philipp.schuster@uni-tuebingen.de

Programmiersprachen II

Hausaufgabe 2 – WS 16 Tübingen, 27. Oktober 2016

Abgabe Geben Sie diese Hausaufgabe bis Donnerstag den 03. November 2016 ab. Entweder bis 12:00 per Email an Philipp Schuster (philipp.schuster@uni-tuebingen.de) oder zu Beginn der Übung auf Papier.

Gruppen Sie können in Gruppen von bis zu 2 Personen arbeiten. Schreiben Sie in jedem Fall die Namen und Matrikelnummern aller Gruppenmitglieder mit auf die Hausaufgabe / in die Email. Wenn Sie in einer Gruppe arbeiten, achten Sie darauf, dass alle Mitglieder der Gruppe den Stoff verstehen. Nur dann sind die Hausaufgaben eine gute Vorbereitung auf die Prüfung.

Punkte Sie können für die Aufgaben dieser Woche jeweils zwischen 0 und 2 Punkten bekommen. Insgesamt also zwischen 0 und 6 Punkten. Sie bekommen für die Aufgaben jeweils:
  1 Punkt, wenn Ihre Abgabe zeigt, daß Sie sich mit der Aufgabe ernsthaft beschäftigt haben.
  2 Punkte, wenn Sie die Aufgabe weitgehend korrekt gelöst haben.
Um zur Klausur zugelassen zu werden müssen Sie mindestens 50% der maximal möglichen Punkte in den Hausaufgaben erreichen. Mit 60% bis 100% der möglichen Hausaufgabenpunkte erhalten Sie einen Bonus von 0% bis 20% der Klausurpunkte in der Klausur.

Aufgabe 1: Ableitungsbäume

Wir betrachten eine Beispielsprache mit folgender Grammatik:

⟨*term*⟩ ::= ‘`zero`’ | ‘`succ`’ ⟨*term*⟩ | ‘`false`’ | ‘`true`’
  | ‘`iszero`’ ⟨*term*⟩ | ‘`if`’ ⟨*term*⟩ ‘`then`’ ⟨*term*⟩ ‘`else`’ ⟨*term*⟩

Wir definieren eine Semantik für die Sprache. Dazu definieren wir eine Relation $\longrightarrow$ mit folgenden Ableitungsregeln:

E-SUCC
$$\frac{t_1 \longrightarrow t_1'}{\mathrm{succ}\, t_1 \longrightarrow \mathrm{succ}\, t_1'}$$

E-ISZEROZERO
$$\mathrm{iszero\ zero} \longrightarrow \mathrm{true}$$

E-ISZEROSUCC
$$\mathrm{iszero}(\mathrm{succ}\, t) \longrightarrow \mathrm{false}$$

E-ISZERO
$$\frac{t_1 \longrightarrow t_1'}{\mathrm{iszero}\, t_1 \longrightarrow \mathrm{iszero}\, t_1'}$$

E-IFTRUE
$$\mathrm{if\ true\ then}\ t_2\ \mathrm{else}\ t_3 \longrightarrow t_2$$

E-IFFALSE
$$\mathrm{if\ false\ then}\ t_2\ \mathrm{else}\ t_3 \longrightarrow t_3$$

E-IF
$$\frac{t_1 \longrightarrow t_1'}{\mathrm{if}\ t_1\ \mathrm{then}\ t_2\ \mathrm{else}\ t_3 \longrightarrow \mathrm{if}\ t_1'\ \mathrm{then}\ t_2\ \mathrm{else}\ t_3}$$

Beweisen Sie, dass der Term $\mathrm{succ}(\mathrm{succ}(\mathrm{iszero}(\mathrm{succ}\,\mathrm{zero})))$ nicht in Normalform ist. Zeichnen Sie dazu einen Ableitungsbaum mit Wurzel:

$$\frac{?}{\mathrm{succ}(\mathrm{succ}(\mathrm{iszero}(\mathrm{succ}\,\mathrm{zero}))) \longrightarrow \mathrm{succ}(\mathrm{succ}\,\mathrm{false})}$$

Aufgabe 2: Mehrschritt Reduktion

Wir betrachten wieder die Sprache und Ableitungsregeln aus Aufgabe 1. Wir definieren die Evaluationsrelation $\longrightarrow^*$ mit folgenden Ableitungsregeln:

$$\textsc{M-Single}\ \frac{t \longrightarrow t'}{t \longrightarrow^* t'} \qquad \textsc{M-Reflexive}\ \ t \longrightarrow^* t \qquad \textsc{M-Transitive}\ \frac{t \longrightarrow^* t' \qquad t' \longrightarrow^* t''}{t \longrightarrow^* t''}$$

Zeigen Sie dass der Term $\mathrm{if}\,(\mathrm{iszero}\,\mathrm{zero})\,\mathrm{then}\,\mathrm{zero}\,\mathrm{else}\,\mathrm{zero}$ in mehreren Schritten zu dem Term zero evaluiert. Zeichnen Sie dazu einen Ableitungsbaum mit folgender Wurzel:

$$\frac{?}{\mathrm{if}\,(\mathrm{iszero}\,\mathrm{zero})\,\mathrm{then}\,\mathrm{zero}\,\mathrm{else}\,\mathrm{zero} \longrightarrow^* \mathrm{zero}}$$

Aufgabe 3: Induktion über Ableitungsbäume

Die Funktion size sei für die Sprache aus Aufgabe 1 induktiv definiert als:

$\mathrm{size}(\mathrm{zero}) = 1$
$\mathrm{size}(\mathrm{succ}\,t_1) = \mathrm{size}(t_1) + 1$
$\mathrm{size}(\mathrm{false}) = 1$
$\mathrm{size}(\mathrm{true}) = 1$
$\mathrm{size}(\mathrm{iszero}\,t_1) = \mathrm{size}(t_1) + 1$
$\mathrm{size}(\mathrm{if}\,t_1\,\mathrm{then}\,t_2\,\mathrm{else}\,t_3) = \mathrm{size}(t_1) + \mathrm{size}(t_2) + \mathrm{size}(t_3) + 1$

Zeigen Sie durch Induktion über die möglichen Ableitungsbäume, dass aus $t \longrightarrow t'$ folgt dass $\mathrm{size}(t') < \mathrm{size}(t)$.