



Kategorientheorie für Programmierer

Hausaufgabenblatt 7 – SS18

Tübingen, 22. Juni 2018

Aufgabe 1: Lektüre

Für die kommende Woche lesen Sie bitte Kapitel 22 und schicken Ihre Fragen bis Dienstag Abend an uns.

Aufgabe 2: Monaden

Im Abschnitt 22.3 sind die folgenden kommutativen Diagramme für die Monadengesetze gegeben:

$$\begin{array}{ccc}
 T^3 & \xrightarrow{T\mu} & T^2 \\
 \mu_T \downarrow & & \downarrow \mu \\
 T^2 & \xrightarrow{\mu} & T
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccc}
 T & \xrightarrow{T\eta} & T^2 & \xleftarrow{\eta_T} & T \\
 & \searrow \text{id} & \downarrow \mu & \swarrow \text{id} & \\
 & & T & &
 \end{array}$$

1. Übersetzen Sie die Diagramme in Gleichungen zwischen Haskell Funktionen, wobei Sie für T die Listen Monade einsetzen.
2. Denken Sie sich einen Beispielwert für die linke obere Ecke im linken Diagramm aus, und vollziehen Sie nach, dass die Gleichung erfüllt wird.
3. Beweisen Sie die Monadengesetze für Listen durch *equational reasoning*.

Hinweis: Verwenden Sie eine geeignete (rekursive) Definition der entsprechenden Haskell Funktionen.

Aufgabe 3: Monoidale Kategorien

Im Abschnitt 22.1 werden monoidale Kategorien definiert. Zeigen Sie, dass **Hask** zusammen mit `Either` eine monoidale Kategorie bildet. Geben sie dazu die folgenden Dinge an:

1. Das neutrale Objekt i
2. Die Bifunktor-Instanz von `Either` (d.h. die Funktion `bimap`)
3. die natürlichen Transformationen $\alpha_{a,b,c}$, λ_a und ρ_a

Aufgabe 4: Die State Monade

Die Kategorie der punktierten Haskell-Typen \mathbf{Hask}_* besitzt als Objekte Paare (a, t) von Haskell-Typen a und Termen t vom Typ a . Die Morphismen zwischen (a, t_a) und (b, t_b) sind Haskellfunktionen $f: a \rightarrow b$ mit $f(t_a) = t_b$.

Beispielsweise ist in \mathbf{Hask}_* die `even` Funktion eine Funktion zwischen $(\text{Int}, 2)$ und $(\text{Bool}, \text{True})$, aber nicht zwischen $(\text{Int}, 4)$ und $(\text{Bool}, \text{False})$.

Betrachten Sie folgende Adjunktion von Funktoren zwischen \mathbf{Hask} und \mathbf{Hask}_* :

$$\mathbf{Hask} \begin{array}{c} \xrightarrow{L} \\ \xleftarrow{R} \\ \perp \end{array} \mathbf{Hask}_*$$

Wobei die Funktoren durch

$$L a = (\text{Either } () a, ())$$

$$L f = \lambda x \rightarrow \text{case } x \text{ of}$$

$$\text{Left } () \rightarrow \text{Left } ()$$

$$\text{Right } y \rightarrow \text{Right } (f y)$$

$$R (a, t) = a$$

$$R f = f$$

gegeben sind.

Leiten Sie die Monadeninstanz für $R \circ L$ aus der Adjunktion her. Welcher Monade entspricht dies?